

รหัสนักศึกษา.....

ข้อสอบปลายภาควิชา scpy 351 vibrations, waves and optics

วันที่ 19 ธันวาคม พ.ศ. 2559 เวลา 9.00 – 12.00 น.

ข้อสอบมีทั้งหมด 8 ข้อ ให้ทำทุกข้อ คะแนนเต็ม 100 คะแนน

ข้อมูลที่อาจเป็นประโยชน์

Wave equation in free space : $\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$; $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m , $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A²

Reflection and Transmission Coefficients (normal incidence)

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$$
$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}$$

Power of a thick lens of thickness d and refractive index n

$$p = p_1 + p_2 - (d/n) p_1 p_2$$

Interference (N equal sources – separation f)

$$I = I_s \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta} \quad \text{where } \beta = \frac{\pi}{\lambda} f \sin \theta$$

Principal Maxima: $I = N^2 I_s$ at $f \sin \theta = n\lambda$

1. กำหนด Plane polarized electromagnetic wave ประกอบด้วย

$$E_x = E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - z) \quad \text{และ} \quad H_y = H_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - z)$$

เนื่องจาก Poynting vector หรือ energy flow ในหน่วย W/m^2 เขียนได้เป็น

$$S = E_x H_y = c \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H_y^2 \right) = c \epsilon_0 E_x^2 \quad \text{เมื่อ } c \text{ คือ อัตราเร็วแสงในสุญญากาศ}$$

- 1.1 (3 คะแนน) Intensity I ของคลื่นนี้หาได้จาก time average ของ S เขียนได้เป็น $I = \bar{S}$ จงแสดงให้เห็นว่า

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

- 1.2 (3 คะแนน) ถ้า energy flux จากแสงอาทิตย์ในแนวตั้งฉากบนผิวโลกมีค่าเป็น 1.35 kW/m^2 จงหา amplitude ของ electric field และ magnetic field บนผิวโลก

- 1.3 (4 คะแนน) ถ้ากำลังแสงทั้งหมดจากดวงอาทิตย์ ถูกส่งมายังโลกโดยไม่มีการสูญเสียและมีค่าเท่ากับกำลังแสงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่บนผิวโลก (1.35 kW/m^2) คูณกับพื้นที่ผิวของทรงกลมที่มีรัศมีเท่ากับระยะทางระหว่างโลกกับดวงอาทิตย์ ($1.5 \times 10^8 \text{ km}$) จงหาขนาดของมวลดวงอาทิตย์ที่ลดลงทุก ๆ 1 วินาที

2. พิจารณาแสงเดินทางใน free space ตกกระทบตั้งฉาก (normal incidence) บนผิว dielectric ที่มีค่าดัชนีหักเห n

- 2.1 (4 คะแนน) จงแสดงให้เห็นว่า reflected intensity I_r และ transmitted intensity I_t เขียนได้เป็น

$$I_r = \left(\frac{E_r}{E_i} \right)^2 = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2$$

และ

$$I_t = \frac{z_1 E_t^2}{z_2 E_i^2} = \frac{4n}{(1+n)^2}$$

เมื่อกำหนดให้

$$r_{\parallel} = \frac{z_2 \cos \phi - z_1 \cos \theta}{z_2 \cos \phi + z_1 \cos \theta}, \quad r_{\perp} = \frac{z_2 \cos \theta - z_1 \cos \phi}{z_2 \cos \theta + z_1 \cos \phi},$$

$$t_{\parallel} = \frac{2z_2 \cos \theta}{z_1 \cos \theta + z_2 \cos \phi}, \quad t_{\perp} = \frac{2z_2 \cos \theta}{z_2 \cos \theta + z_1 \cos \phi}$$

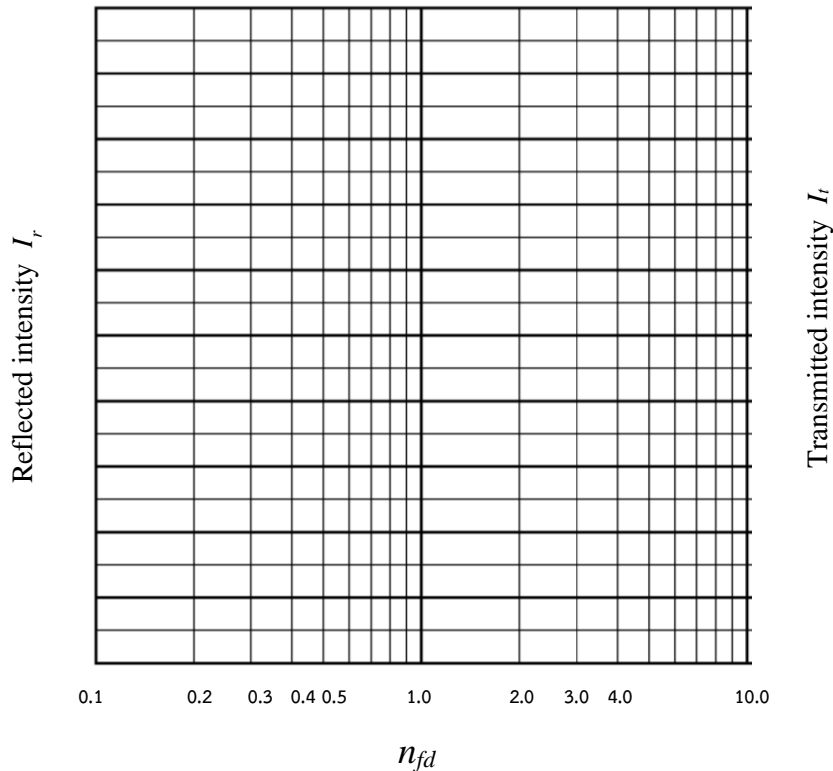
โดยที่ $n = \frac{z_1 (\text{impedance of free space})}{z_2 (\text{impedance of dielectric})}$, $\theta = \text{incidence angle}$, $\phi = \text{transmitted angle}$

- 2.2 (8 คะแนน) ให้วาดกราฟคร่าว ๆ (จากกราฟที่ห้มาด้านล่าง) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง reflected intensity I_r

สำหรับ normal incidence กับ n_{fd} และความสัมพันธ์ระหว่าง transmitted intensity I_t สำหรับ normal incidence กับ

n_{fd} เมื่อ n_{fd} คือ อัตราส่วนระหว่างค่าดัชนีหักเหของ free space กับค่าดัชนีหักเหของ dielectric และจากกราฟ

ที่ได้ (หรือจากการคำนวณ) ให้หาค่า n_{fd} ทั้งหมดที่ทำให้ $I_r = I_t$ สำหรับ normal incidence



3. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ในแนวแกน x ในท่อนำคลื่นตัวนำ (conduction hollow tube) สำหรับท่อนำคลื่นที่มีหน้าตัดรูปทรงใด ๆ (arbitrary cross section) โดย tangential component ของ electric field \vec{E} ที่บริเวณผนังของท่อนำคลื่นตัวนำเป็นศูนย์ตลอดเวลา จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 (2 คะแนน) จงเขียน wave equation ในรูปทั่วไปสำหรับคลื่นเคลื่อนที่ใน 3 มิติ สำหรับ rectangular coordinates x, y, z และเวลา t

3.2 (4 คะแนน) ถ้า solution ของ wave equation ใน 3.1 เขียนได้เป็น $\vec{E} = E(y, z)\hat{n} \cos(\omega t - k_x x)$ จงแสดงให้เห็นว่า wave equation เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2 E(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E(y, z)}{\partial z^2} = -k^2 E(y, z)$$

เมื่อ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2$, k_x คือ wave number สำหรับคลื่นเคลื่อนที่ในแนวแกน x และ \hat{n} คือ unit vector ใน

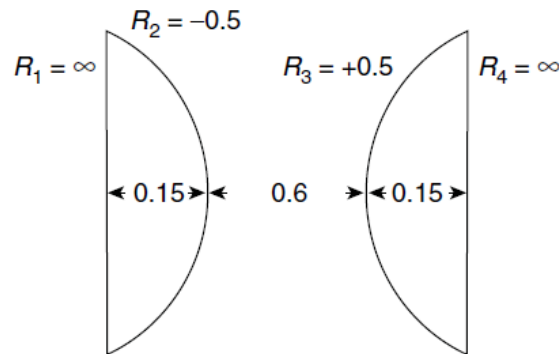
ระนาบ yz

3.3 (6 คะแนน) สำหรับท่อนำคลื่นที่มีหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง a ในแนวแกน y และยาว b ในแนวแกน z โดยอาศัยวิธีการ separation of variables และ boundary conditions : $E_x = 0$ ที่ $y=0, y=a$ และ

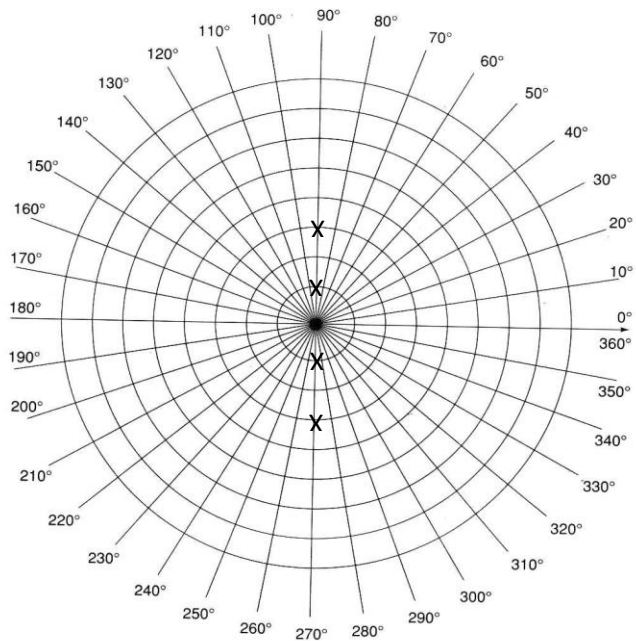
$z=0, z=b$ จงแสดงให้เห็นว่า $E_x = A \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{b} \cos(\omega t - k_x x)$ เมื่อ

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

- 3.4 (3 คะแนน) จงคำนวณหาค่า ω (cut off frequency) สำหรับ lowest normal mode เมื่อกำหนดให้ k_x เป็นจำนวนจริง
- 3.5 (3 คะแนน) เงื่อนไขใดที่ทำให้เกิด degenerate normal modes สำหรับ wave propagation ในกรณีนี้ (ให้ตอบคำถามพร้อมทั้งยกตัวอย่าง)
- 4 (10 คะแนน) โดยอาศัย matrix method หรือวิธีการอื่นที่เหมาะสม จงหาความยาวโฟกัสและตำแหน่งของ principal plane สำหรับ optical system ที่ให้มา เมื่อกำหนดค่าดัชนีหักเห n ของเลนส์ทุกอันในระบบเป็น 1.5 ค่า R_i แสดงถึงรัศมีความโค้งที่ i และตัวเลขที่แสดงทุกตัวมีหน่วยเดียวกัน



- 5 (6 คะแนน) กำหนดให้ a เป็นระยะทางระหว่างวัตถุและภาพจริงที่เกิดจากเลนส์นูนบาง ความยาวโฟกัส f ถ้าระยะทางดังกล่าวคงเดิม จงแสดงให้เห็นว่ามี “ระยะวัตถุ” ที่เป็นไปได้อยู่ 2 ตำแหน่ง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข
- 6 Linear array source ที่มีเงื่อนไขว่า ระยะห่างระหว่าง source เท่ากับความยาวคลื่นพอดี ทำให้เกิดคลื่นลัพธ์แผ่ออกไปตามแนวการวางตัวของ linear array source ($\theta = \pm \pi/2$) linear array source ชนิดนี้มีชื่อเรียกว่า end fire array
- 6.1 (3 คะแนน) จงแสดงที่มาของเงื่อนไขที่ทำให้ได้ end fire array
- 6.2 (5 คะแนน) กำหนดจำนวนของ source $N = 4$ จงหาจำนวนของ minima ที่มี zero intensity และตำแหน่งเชิงมุม θ ของ minima ที่ทำได้
- 6.3 (2 คะแนน) กำหนดจำนวนของ source $N = 4$ จงหาจำนวน subsidiary maxima
- 6.4 (5 คะแนน) จงวาดรูปแสดง intensity ของ interference pattern ใน polar plot ที่ให้มา (เครื่องหมาย X แทนตำแหน่งของ sources)



6.5 (4 คะแนน) โดยอาศัย polar plot หรือการคำนวณ จงหา angular width ของ Principal maximum ในแนวการวางตัวของ linear array ($\theta = \pm \pi/2$) (ให้ตอบในหน่วยองศา)

7 7.1 (5 คะแนน) กำหนด Jones matrix สำหรับ optical filter เป็น

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

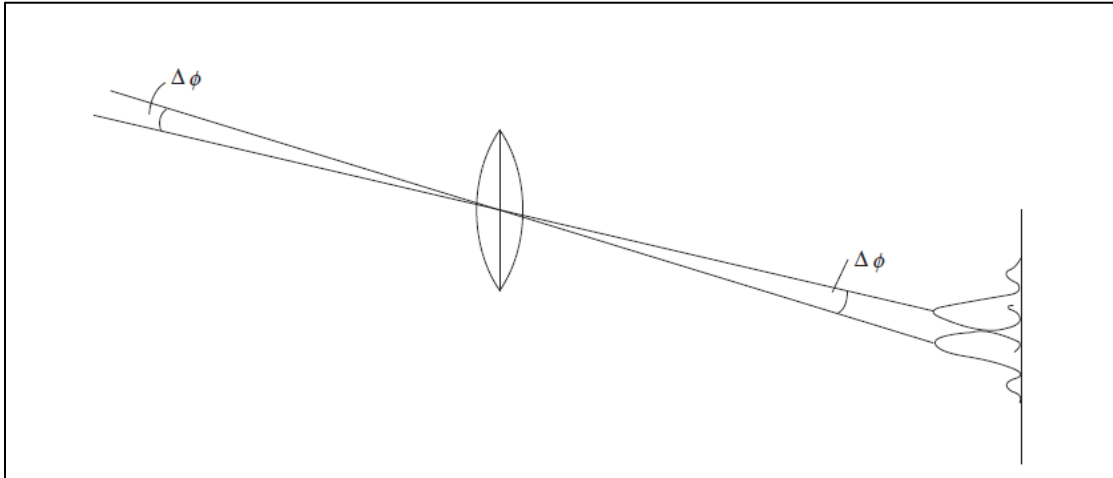
จงแสดงการทำงานของ filter นี้ว่ามีผลต่อแสงโพลาไรซ์อย่างไรด้วย matrix method และสรุปว่า filter ชนิดนี้มีหน้าที่อะไร

7.2 ลำแสง incoherent 2 ลำ แสดงได้โดย Stokes parameters (1,1,0,0) และ (3,0,0,3) จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.2.1 (3 คะแนน) ลำแสงทั้งสองมีสถานะโพลาไรซ์อะไร

7.2.2 (3 คะแนน) จงบรรยายสถานะโพลาไรซ์ของลำแสงลัพธ์เมื่อรวมลำแสงทั้งสองเข้าด้วยกัน

- 8 8.1 (6 คะแนน) รูปแสดงการเลี้ยวเบนของลำแสงความยาวคลื่น λ สองลำผ่านช่องเปิดที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง d จากวัตถุที่วางอยู่ห่างกันด้วยระยะทางเชิงมุม $\Delta\phi$ ถ้ารูปที่แสดงสอดคล้องกับ Rayleigh's criterion เราจะได้ความสัมพันธ์ที่เรียกว่า diffraction limited resolution $\Delta\phi = \frac{1.22\lambda}{d}$ จงบรรยายว่าตัวแปร (λ, d) มีผลอย่างไรต่อ diffraction limited resolution



- 8.2 (8 คะแนน) โดยอาศัยความเข้าใจในเรื่อง diffraction limited resolution ใน 8.1 จงแสดงให้เห็นว่ามนุษย์อวกาศที่อยู่บน International Space Station (ISS) เห็นอพื้นโลกเป็นระยะทาง 400 km ไม่สามารถมองเห็นกำแพงเมืองจีนด้วยตาเปล่าได้ กำหนดให้ (1) ส่วนกว้างที่สุดของกำแพงเมืองจีนเป็น 10 m
- (2) ช่วงความยาวคลื่นที่ตามองเห็น 400 – 700 nm
- (3) เส้นผ่านศูนย์กลางของรูม่านตาของนักบินอวกาศมีค่าสูงสุด 8 mm

ในการคำนวณเพื่อหาคำตอบ ต้องให้เหตุผลประกอบในการเลือกใช้ค่าความยาวคลื่นเฉพาะบางค่า